GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

TEMA D'ESAME DELLO 04/02/2019 - SOLUZIONI

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1

Consideriamo la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & 2 & k \\ -1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

essendo k un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango di A_k.

(2) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni del sistema

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, e per tali valori calcolare una base ortonormale di autovettori.

Soluzione

(1) Il determinante di A è uguale a $-4k^2 + 16$, quindi, per $k \neq \pm 2$ la matrice A ha rango 3, mentre, per $k = \pm 2$ essa ha rango 2, in quanto il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è diverso da zero per ogni k.

(2) Indichiamo con B la colonna dei termini noti. Per $k \neq \pm 2$ abbiamo $r(A) = 3 = r(A|B)$, quindi il sistema ammette una sola soluzione. Per $k = 2$ il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, B\}$ è nullo, e, non essendoci ulteriori minori orlati, abbiamo $r(A) = r(A|B) = 2$, per cui il sistema ammette ∞^1 soluzioni. Per $k = -2$ il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, B\}$ è uguale a 12, quindi non nullo, per cui $r(A) = 2 < r(A|B) = 3$, ed il sistema non ammette soluzioni.

(3) La matrice è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica, cioè per $k = 0$. In tal caso abbiamo

$$\chi(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 1) = 0,$$

e quindi $Spec(A_0) = \{2, 2, 4\}$.
L'autospazio E_2 ha dimensione 2 e risulta $E_2 : x - z = 0$, quindi

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

I vettori della base sono già ortogonali tra loro, quindi basta normalizzare

$$E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio E_1 ha dimensione 1, e, per il teorema spettrale esso è già ortogonale ad E_2, per cui basta calcolarne una base normale, e si ha

$$E_1 \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e quindi

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Considerando quindi l'unione delle basi ortonormali dei due autospazi si ha una base ortonormale di autovettori

Esercizio 2

Siano date in $\mathbb{R}^3$ le rette

$$r_1 \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = q \\ y = q \\ z = 0, \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti, trovarne il punto P_0 di intersezione e l'equazione del piano π che le contiene.
(2) Determinare l'equazione del luogo dei punti

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{R}^3 \ : \ (d(P, r_1))^2 = 4(d(P, r_2))^2\} \ .$$

(3) Verificato che $\mathcal{Q}$ è una quadrica, classificarla, e stabilire se $P_0 \in \mathcal{Q}$.

Soluzione

(1) Uguagliando le coordinate del generico punto di r_1 con le corrispondenti coordinate del generico punto di r_2 abbiamo

$$\begin{cases} x = t = q \\ y = 1 = q \\ z = 0 = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quindi le due rette si intersecano nel punto $P_0(1, 1, 0)$. Poiché i punti di entrambe le rette hanno la coordinata z uguale a 0, esse devono appartenere al piano di equazione $z = 0$. Lo stesso risultato si ottiene imponendo che il fascio di piani passanti per una delle due rette contenga un punto dell'altra diverso da P_0.

(2) Considerato per esempio il punto $R_1(0, 1, 0) \in r_1$, la distanza del generico punto $P(x, y, z)$ da r_1 è data da

$$d(P, r_1) = \frac{\|\overrightarrow{R_1P} \wedge \overrightarrow{r_1}\|}{\|\overrightarrow{r_1}\|}.$$

Il prodotto vettoriale $\overrightarrow{R_1P} \wedge \overrightarrow{r_1}$ risulta

$$\overrightarrow{R_1P} \wedge \overrightarrow{r_1} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y-1 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, z, 1-y],$$

e quindi, essendo $\|\overrightarrow{r_1}\| = 1$

$$d(P, r_1) = \sqrt{z^2 + (1-y)^2}.$$

Analogamente, poiché $O(0,0,0) \in r_2$, la distanza del generico punto $P(x,y,z)$ da r_2 è data da

$$d(P, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{r_2}\|}{\|\overrightarrow{r_2}\|}.$$

Il prodotto vettoriale $\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{r_2}$ risulta

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{r_2} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-z, z, x-y],$$

e quindi, essendo $\|\overrightarrow{r_2}\| = \sqrt{2}$

$$d(P, r_2) = \frac{\sqrt{2z^2 + (x-y)^2}}{\sqrt{2}}.$$

Quindi il luogo richiesto ha equazione data da

$$\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 - 4xy + 3z^2 + 2y - 1 = 0.$$

(3) Calcolando gli invarianti abbiamo $I_4 = 0$ ed $I_3 = -6$, quindi $\mathcal{Q}$ è un cono. Per $x = y = 0$ i punti reali $A\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $B\left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ appartengono alla quadrica che quindi è un cono reale. Ovviamente il punto P_0 appartiene a $\mathcal{Q}$ avendo distanza nulla da entrambe le rette r_1, r_2, e quindi verifica l'equazione dl luogo. In alternativa, l'appartenenza si può verificare facilmente osservando che le coordinate soddisfano l'equazione.

Esercizio 3

Consideriamo i sottospazi W, U di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$U = \{(x, y, z, w)^t \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x - y + w = 0\}.$$

(1) Trovare la dimensione e una base dei sottospazi U e W, e scrivere le equazioni cartesiane di W.
(2) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.
(3) Scrivere la matrice di proiezione ortogonale su $U \cap W$.

Soluzione

(1) Lo spazio U è descritto da una sola equazione in $\mathbb{R}^4$, quindi $dim(U) = 4 - 1 = 3$. Dall'equazione abbiamo, per esempio, $y = 2x + w$, quindi il generico vettore di U è del tipo $[x, 2x + w, z, w]^t$, per cui

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x+w \\ z \\ w \end{bmatrix}, \ x, z, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ della matrice avente per colonne i tre generatori di W è non nullo, mentre i suoi orlati sono uguali a zero. Pertanto la matrice ha rango 2, quindi $dim(W) = rank(W) = 2$. Una base di W è, per esempio, data da

$$B_W = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Le equazioni cartesiane di W si ottengono imponendo che abbia rango 2 la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 3 & -1 & w \end{bmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Imponendo che i suoi due possibili orlati siano nulli si ottiene

$$W \begin{cases} 2x - y - w = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

(2) Il sottospazio $U \cap W$ è descritto dalle seguenti equazioni

$$U \cap W \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ 2x - y - w = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 3, quindi $dim(U \cap W) = 4 - 3 = 1$. Per la formula di Grassmann si ha

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

(3) Risolvendo il sistema che descrive analiticamente $U \cap W$ si ha

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Sia A la matrice avente una sola colonna, data dal vettore $[1, 2, 0, 0]^t$. Allora abbiamo

$$(A^t A) = [5] \ \ (A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$R = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{5} [\ 1 \ \ 2 \ \ 0 \ \ 0\ ].$$

Quindi si ha

$$P_{U \cap W} = AR = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che rappresenta la matrice di proiezione richiesta